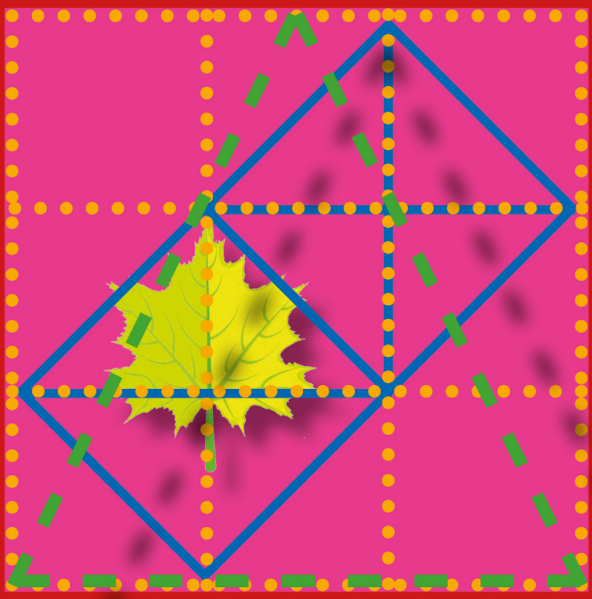
I segreti delle forme

Costruzioni nel piano e nello spazio

Gruppo di ricerca *I fili lunghi della geometria*
A cura di Anna Aiolfi e Donatella Merlo



RicercAzione 25

Indice

Introduzione 9

- Un percorso di progressiva scoperta 12
- Attività e contenuti geometrici 16

Dai fili alle forme 19

- Tendiamo un filo 19
- Tendiamo due fili 22
- Appoggiamo i fili sul foglio 24
- Tra infanzia e primaria: riflessioni e ampliamenti 27
- Forme annidate 32
- Un avvio alle tassellazioni 34

Un quadrato da un foglio A4 39

- La descrizione del foglio A4 41
- La costruzione del quadrato 42
- Uguaglianza per sovrapposizione 44
- Rappresentare la procedura 47
- La costruzione di quadrati simili 49
- Lo scambio con i bambini della scuola primaria 50

Forme a confronto: quadrato e rettangolo 53

- La forma del campo di gioco 53
- Il centro del rettangolo 56

Quadrato e cubo 59

- La costruzione del cubo 60
- Il dado di Nicola 63

La storia di Cubolo 65

- Dalla storia una idea di forma 66
- La faccia di Cubolo 68
- La costruzione di Cubolo 70
- Discutere la rappresentazione 71
- Questioni di taglie e quadretti 72
- Cubolo incontra l'arte 74

Da Cubolo al cordopiano 77

- L'angolo retto descritto dai gesti 82
- Come disegnare un quadrato 83
- Il rombo sul cordopiano 85
- Il confronto 91

Triangolo equilatero e tetraedro 95

- Prime esperienze con triangoli 95
- Dalla figura piana al solido 97
- Il solido "vestito" e "nudo" 99
- Solidi e arte 101

Il tetraedro: gesti e immaginazione 105

- La soluzione nel piccolo gruppo 108

La soluzione nel gruppo classe 113
I contenuti matematici 118
Riflessioni conclusive 119

Descrivere una figura 125

Le descrizioni e le riproduzioni 128
Osservazioni sulle prime due attività 135
Il confronto dei protocolli e la discussione in classe 137
Le descrizioni collettive 143

Il cerchio questo sconosciuto 153

In cerchio per il gioco del pugno 154
Dentro al cerchio 157
I cerchi di Delaunay 159
Il centro della trottola 161
Se io fossi una trottola 163

Costruiamo un orologio 165

Come fare un cerchio 165
La costruzione dell'orologio 167
Le istruzioni per disegnare un cerchio 171
Considerazioni finali 174

Angoli e orologi 175

Una prima esperienza 177
Il problema degli orologi 178
Il grado 182
Costruiamo l'angolo di un grado 183
Il movimento delle due lancette 186

Gli angoli in verticale 189

L'altezza della parete dell'aula 191
L' altezza della scuola 192

Introduzione

Il compito principale della scuola dell'infanzia e della scuola primaria rispetto al curricolo di geometria è costruire un'idea "robusta" di che cosa siano le forme e soprattutto di quali siano le loro caratteristiche: questa conoscenza aiuta poi a dare loro un nome non basandosi solo su fatti percettivi ma sull'interiorizzazione di una serie di proprietà.

Le proprietà di una forma sono determinate dalla sua struttura: per comprendere la struttura di una forma bisogna imparare a costruirla concretamente con vari materiali e seguendo diverse procedure. L'insieme di azioni e immagini mentali che intervengono e interagiscono nella costruzione sono alla base del processo di concettualizzazione.

Alla scuola dell'infanzia partendo dal confronto e dalla manipolazione di oggetti e situazioni presenti nella realtà si costruiscono queste prime idee di forma. La forma, però, deve essere percepita come proprietà dell'oggetto, non confusa con l'oggetto stesso. Il quadrato è un'astrazione, i quadrati nella realtà non esistono in quanto tali ma solo come modi per descrivere una forma individuata in un oggetto. Inizialmente il bambino usa la categoria "quadrato" per imitazione e non sa esprimere la differenza tra un quadrato e un rettangolo con dimensioni dei lati quasi uguali. Nella sua mente però si sta formando la consapevolezza che i lati uguali siano una peculiarità di questa forma che può ritrovare in tante altre situazioni. Inizia così un processo di astrazione che diventerà presa di coscienza di che cosa significhi la parola "quadrato" per la geometria solo molto più tardi.

L'obiettivo della scuola è quindi costruire questa idea di forma facendo ripercorrere ai bambini lo stesso processo di astrazione che ha condotto l'umanità a costruire poi tutta la geometria. Per i bambini più piccoli non significa solo imparare ad associare il nome alla

forma ma capire in che cosa consista l'essere "quadrato" o "triangolo" e saperlo comunicare. Devono allora costruirsi un'immagine mentale da condividere con altri descrivendo le caratteristiche che distinguono una forma dall'altra e la fanno "riconoscere". Ma come si costruisce l'immagine mentale di una forma geometrica a quest'età?

Si può partire da oggetti comuni che incorporino quella forma e aiutare i bambini a "estrarla" passando attraverso il disegno e il confronto di disegni di diversi bambini.

Le esperienze narrate in questo libro cominciano invece con dei fili tesi, modelli elementari di linee rette che, incrociandosi in modo più o meno casuale, delimitano sul piano forme poligonali. Quando gli incroci diventano più intenzionali, le relazioni fra le rette si precisano e le forme assumono aspetti più definiti, le caratteristiche che si debbono conservare diventano sempre più numerose finché si arriva anche al quadrato.

Cambiamo poi materiale: con la carta si ottengono certe caratteristiche attraverso piegature ben fatte. Una piegatura è un buon modello di linea retta, si vede e... si sente: quando premiamo con le dita sulla carta, come per magia, vediamo apparire una "linea perfettamente diritta".

Un filo teso entra di nuovo in gioco se vogliamo disegnare l'oggetto simmetrico per eccellenza: il cerchio. Il filo svolge la stessa funzione del "compasso": come arrivano i bambini a definire la procedura che funziona? Il corpo e il suo movimento sono di nuovo protagonisti.

Spostandosi da un punto ad un altro di una stanza o di un cortile si traccia idealmente una linea retta: gli occhi "prendono la mira" e il corpo procede senza "mai" cambiare direzione. Gli spostamenti nello spazio mettono continuamente alla prova questa abilità innata di trovare la strada più breve fra due punti che è anche alla base di molti giochi che fanno i bambini in cortile e, se sfruttata, può portare molto lontano.

Il libro suggerisce esperienze e invita a confrontare, a discutere, a trovare forme di comunicazione diversificate a seconda dell'età dei bambini. Nel corso degli anni, sperimentazione dopo sperimentazione, abbiamo tracciato le linee principali di un lavoro complessivo sulla geometria nel tentativo di dare unitarietà alle esperienze a partire dalla scuola dell'infanzia.

I temi sviluppati servono per tracciare un curricolo ideale di geometria che nel corso di ogni esperienza si arricchisce via via di nuovi elementi. È un curricolo che si sviluppa quasi da solo seguendo il filo logico dei ragionamenti dei bambini, le loro rappresentazioni e soprattutto sapendo come sfruttare le loro parole. Per questo nel testo sono inseriti ampi stralci tratti dalle trascrizioni delle discussioni. Sono questi che dovrebbero dare agli insegnanti elementi sufficienti per trasportare le situazioni qui raccontate nella loro realtà scolastica. Come organizzare un'attività, quali domande fare, quali rilanci per completare, approfondire. Percorsi che si intrecciano e, visti nel loro insieme, ci aiutano a fare chiarezza su che cosa significa fare geometria nella scuola dell'infanzia e nella scuola primaria.

Una riflessione che ci deve accompagnare nella lettura del libro riguarda la difficoltà oggettiva che presentano le situazioni tridimensionali. Nell'aula i bambini fanno parte di ciò che in essa c'è esattamente come il filo che tendono, sul foglio o sul pavimento che modellizza il piano; il bambino si pone invece al di fuori dell'ambiente in cui descrive la situazione e la può valutare strutturandola come vuole. Noi nella stanza avremmo bisogno di essere di quattro dimensioni per poter dominare il tutto nello stesso modo e allora ci poniamo nel piano, riflettiamo e ne traiamo importanti conseguenze per gestire proprio quella realtà difficile da imbrigliare![1].

[1] Maria Cantoni ci ha regalato questa bella simulazione su come vede la sfera un abitante di Flatlandia, il famoso libro di Edwin A. Abbott (1884) https://www.geogebra.org/m/v39jb7qj

Per comunicare le caratteristiche di un solido i bambini utilizzano quindi tutte le risorse che hanno a disposizione: parole, gesti, rappresentazioni… Questo risulterà molto evidente nel racconto delle attività svolte con il cubo e con il tetraedro con bambini di diverse età.

Un percorso di progressiva scoperta

Il senso complessivo delle proposte contenute nel libro è coerente con il contesto in cui le diverse esperienze narrate dagli insegnanti sono collocate che qui cercheremo brevemente di tratteggiare per quanto riguarda le forme.

Le attività proposte, qui e in altri testi della collana[2] sullo stesso tema, sono articolate intorno ai contenuti portanti della disciplina (cfr. mappa a fine capitolo) da sviluppare nella scuola dell'infanzia e primaria che abbiamo così individuato:

- orientamento, lateralizzazione
- punto, segmento (retta), piano
- figure solide e piane
- descrizione di una forma
- angolo retto
- perpendicolarità e parallelismo
- triangolo
- angolo nel piano e nello spazio
- poligoni
- trasformazioni geometriche
- circonferenza

Le attività non sono organizzate per sviluppare in modo sequenziale i contenuti, ma rappresentano occasioni per metterli in gioco, più di uno, contemporaneamente, a diversi livelli di complessità, in un percorso a spirale, con frequenti ritorni indietro per affinare i discorsi. I concetti nascono in modo naturale riflettendo sulle esperienze condotte, risolvendo problemi pratici di costruzione

[2] Vi invitiamo a leggere gli eBook della stessa collana *Oggetti forme strutture* e *Danze sul filo* che sviluppano altri temi di geometria.

di “oggetti” o problemi posti in modo più intenzionale dall’insegnante.

Nelle prime esperienze della scuola dell’infanzia l’attenzione è ancora molto focalizzata sulle difficoltà nell’*orientamento* e nella *lateralizzazione*. Ma fin dall’inizio teniamo presente che ciò che deve emergere dai discorsi e dalle osservazioni dei bambini sono innanzitutto gli enti primitivi: *punto, retta e piano.* La retta è vista come semplice “segmento”, facilmente modellizzabile con oggetti comuni: una cannuccia, una matita, un bastoncino. Successivamente, nella scuola primaria, questa idea si amplia fino alla costruzione del concetto più astratto di retta, immaginata come un segmento prolungabile indefinitamente in entrambi i versi, mantenendo però ferma la direzione. Il concetto che si affronta inizialmente è quindi quello di “rettilineità” che anche i bambini più piccoli riescono ad esprimere con parole, gesti, azioni.

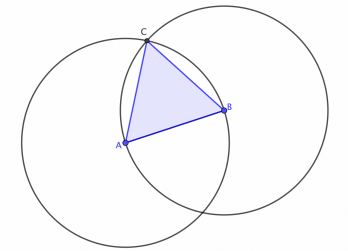
La conoscenza dell’*angolo retto* fa parte di elementari esperienze con le forme e i bambini lo riconoscono e lo nominano, con parole ancora tutte da ridefinire nei significati, quando cercano di descrivere una forma come il quadrato o il rettangolo. Padroneggiare il *concetto di angolo, nel piano e nello spazio,* in tutto il suo significato geometrico, è qualcosa che arriva molto più tardi, quando si astrae dalla situazione specifica, se ne intuiscono i componenti (semirette e punto) e lo si riconosce come ente composto da altri enti considerati primitivi.

Allo stesso modo parlare di *figure piane e solide* e conoscere il loro nome è un’esperienza precoce, ma saper nominare una forma non comporta ancora la capacità di prenderne in esame tutte le caratteristiche e quindi di padroneggiarne la struttura complessiva. Anche questo arriverà più tardi, quando ci sarà bisogno di *descrivere una forma* e quindi di definirne tutte le caratteristiche per poterle comunicare.

Il *parallelismo* e la *perpendicolarità* sono relazioni tra rette: l’esigenza di conoscerle e anche di nominarle compare molto presto

perché, come nei casi precedenti, sono sempre sotto i nostri occhi. La perpendicolarità è strettamente legata all'angolo retto, due rette perpendicolari sono tali perché formano quattro angoli retti: nel realizzare con le piegature un modello di angolo retto, i quattro angoli si sovrappongono perché sono uguali. Più complesso parlare di parallelismo. In un primo momento ci possiamo accontentare di un uso del termine nel senso del linguaggio comune, ma poi dovremo approfondire. Per questo ci sembra più coerente con il percorso che proponiamo far intuire il parallelismo ragionando sul fatto che due rette possono incontrarsi oppure no: solo in questo secondo caso si parla di rette parallele.

Il *triangolo* svolge un ruolo particolare nel percorso di conoscenza delle figure piane perché è la figura che si costruisce con il minor numero di segmenti, tre. È l'unico poligono rigido, e conoscerlo offre strumenti per comprendere la struttura di altre forme poligonali. Ricordiamo che il triangolo equilatero è la figura cardine negli elementi di Euclide e viene infatti definita subito dopo il segmento e la circonferenza. Non serve altro per costruirlo.



Il discorso sulle *trasformazioni geometriche* è un po' più complesso perché mette in gioco anche le nostre strategie didattiche. L'importanza che diamo alla manipolazione deriva dal fatto che da questa esperienza i bambini ricavano le loro prime concezioni relativamente alle forme: è manipolando, facendo combaciare, piegando e sovrapponendo, applicando quindi in modo inconsapevole il "trasporto rigido", che si rendono conto di

uguaglianze e disuguaglianze e quindi imparano a ragionare sulle caratteristiche delle forme. Queste azioni, quindi, incorporano le isometrie, ben prima che il bambino ne riconosca le proprietà e le utilizzi in modo intenzionale. Anche quando ricopiano una forma dalla lavagna sul loro quaderno, i bambini utilizzano, in modo inconsapevole, la similitudine.

Nel nostro percorso assegniamo un ruolo importante alla *circonferenza,* che non consideriamo come parte di un capitolo a sé, da trattare solo in quinta primaria. I bambini hanno esperienza della circonferenza molto presto, già con i loro primi giochi e ne individuano facilmente le caratteristiche principali. Avere la circonferenza come strumento è un obiettivo importante fin dalle prime classi perché ci offre il modo di realizzare facilmente il trasporto rigido di un segmento in qualsiasi parte del piano.

Da quanto descritto fin qui si dovrebbe intuire che quando parliamo di geometria escludiamo automaticamente i ragionamenti "geometrici" che utilizzano come strumento di verifica la misura. Misurare ha un'utilità pratica in certe situazioni, ma le uguaglianze e le disuguaglianze si verificano con semplici sovrapposizioni, *non misurando con il righello*. Si sfruttano le proprietà delle isometrie, si cerca l'azione giusta per "dimostrare" che due angoli o due segmenti sono uguali; può essere una piegatura, che realizza una simmetria assiale, o uno spostamento sul piano che si può tradurre in una traslazione o in una rotazione. In ogni caso, per costruire un ragionamento valido, per produrre un'argomentazione in contesto geometrico, si deve fare riferimento a "proprietà geometriche" che dipendono da fatti certi, ad esempio da come si è costruita una figura, non dall'uso di uno strumento di misura, per quanto preciso possa essere.

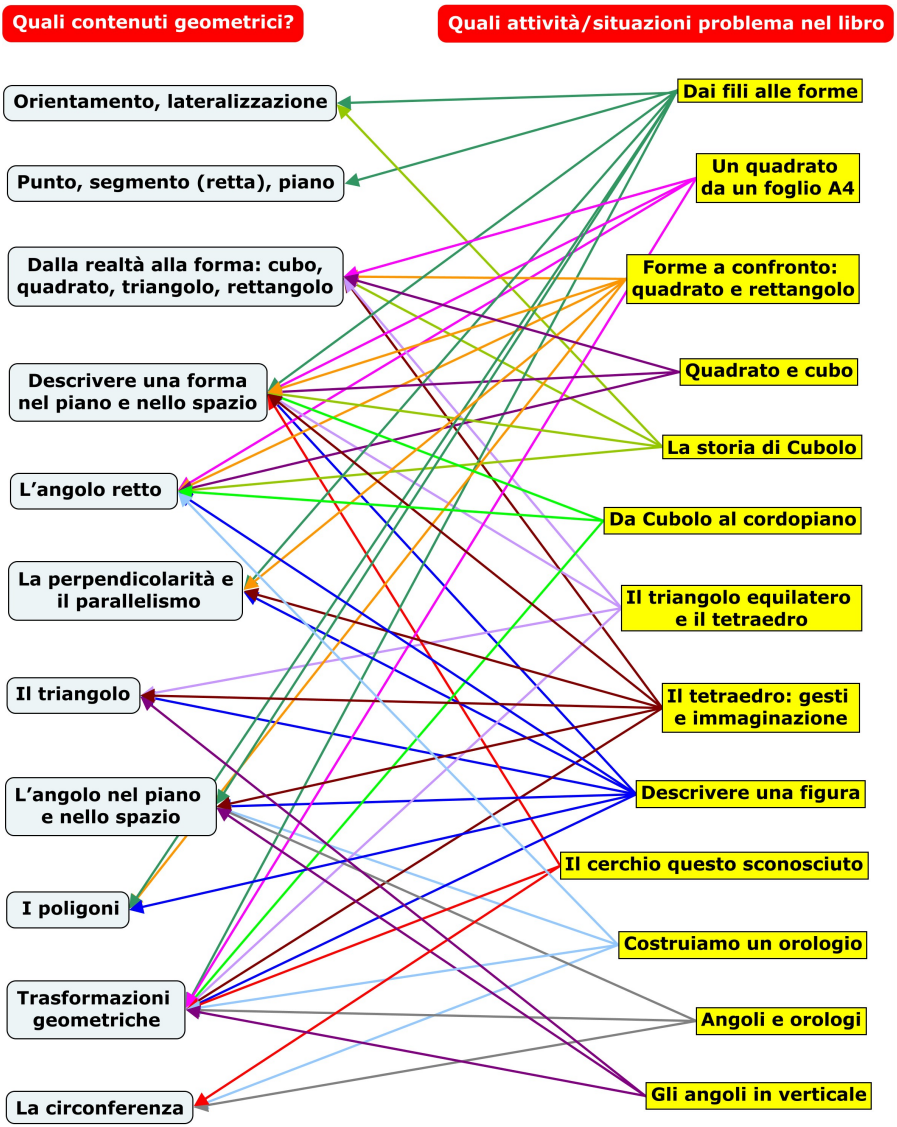
Il tema della misura di perimetro e aree non viene trattato in questo libro, sarà oggetto di un'altra pubblicazione. È ovvio però che non ha senso parlare di perimetro e area se prima non si padroneggiano le caratteristiche delle forme. Le formule dipendono da queste

caratteristiche e, nel caso dell'area, dal saper gestire con competenza le isometrie necessarie a trasformare una figura in un'altra equivalente.

Attività e contenuti geometrici

Dopo aver ripercorso a grandi linee i contenuti principali del curricolo di geometria proviamo a vedere a quali di questi contenuti fanno riferimento le esperienze del libro, e lo facciamo attraverso una mappa. Gli esempi presentati non sono sicuramente esaustivi ma esemplificano i passaggi che riteniamo più importanti per mantenere coerenza e continuità nel discorso sulle forme.

Nella scelta delle esperienze da proporre abbiamo puntato sulla varietà di approccio dei diversi insegnanti per dare una visione complessiva del metodo di lavoro. Abbiamo tralasciato attività già comunemente praticate, che si trovano sui libri di testo, suggerendo piuttosto situazioni problematiche nuove o trattate in modo insolito, capaci di far discutere i bambini e di far emergere le loro teorie ingenue che saranno poi confermate o invalidate dalle esperienze. Questo avviene solo se l'insegnante è capace di svolgere bene il suo ruolo di mediatore ma anche di "provocatore", quando necessario. Un insegnante mediatore/regista che deve saper far parlare i propri alunni, anche i più piccoli, dare valore alle loro parole e stimolarli a fare e pensare, saper attendere e dare tempo ai bambini di sviluppare le idee prima di giungere alla definizione di un concetto.


Quali contenuti geometrici?
Quali attività/situazioni problema nel libro
Orientamento, lateralizzazione
Punto, segmento (retta), piano
Dalla realtà alla forma: cubo, quadrato, triangolo, rettangolo
Descrivere una forma nel piano e nello spazio
L'angolo retto
La perpendicolarità e il parallelismo
Il triangolo
L'angolo nel piano e nello spazio
I poligoni
Trasformazioni geometriche
La circonferenza
Dai fili alle forme
Un quadrato da un foglio A4
Forme a confronto: quadrato e rettangolo
Quadrato e cubo
La storia di Cubolo
Da Cubolo al cordopiano
Il triangolo equilatero e il tetraedro
Il tetraedro: gesti e immaginazione
Descrivere una figura
Il cerchio questo sconosciuto
Costruiamo un orologio
Angoli e orologi
Gli angoli in verticale

Scoprire e interiorizzare le caratteristiche di una forma è un percorso lungo che deve iniziare già nei primi anni di scuola dell'infanzia. Le forme che i bambini incontrano nel percorso di conoscenza suggerito nel libro sono inizialmente le più comuni: quadrato, rettangolo, triangolo e cerchio. Il modo in cui gli insegnanti guidano poco per volta gli allievi a scoprirne tutte le caratteristiche è però del tutto inedito perché prende sempre spunto da attività pratiche che diventano poi oggetto di riflessione e di discussione nei gruppi di bambini, non importa di quale età. Dalle discussioni si sviluppano le prime concettualizzazioni: nulla è dato, tutto è costruito con i bambini, accompagnando i loro processi, dando loro il tempo necessario per dare forma alle idee che diventano sempre più complesse e articolate.
Lati, angoli, diagonali, simmetrie, relazioni di parallelismo e perpendicolarità, ruolo fondamentale del cerchio… sono elementi dello studio delle figure piane che si ritrovano e si ridefiniscono quando la forma piana diventa elemento della struttura di un poliedro: dal quadrato al cubo, dal triangolo al tetraedro.
Le esperienze, sviluppate in classi e tempi diversi, sono ampiamente documentate con fotografie, prodotti dei bambini, stralci di discussioni facilmente replicabili. Un curricolo completo di geometria da mettere subito in pratica.

Questo libro è stato progettato e realizzato dal gruppo *I fili lunghi della geometria,* coordinato da Valeria Perotti e composto da insegnanti MCE del Piacentino. Alcuni capitoli sono stati scritti dalle insegnanti di scuola dell'infanzia Francesca Zannoni, Fulvia Bassi, Lucia Scotti ed Eleonora Belli; altri dalle insegnanti di scuola primaria Antonella Varesi e Maria Rosaria Mazza. I restanti capitoli sono di Anna Aiolfi e Donatella Merlo, curatrici del libro e formatrici, per l'MCE, del gruppo piacentino e del gruppo di ricerca nazionale MCE *Creazioni matematiche*.
Anna Aiolfi, inoltre, collabora con Istituti scolastici, Enti e Associazioni per formazione e ricerca didattica in ambito matematico e scientifico, e scrive sulla rivista «Scuola dell'Infanzia». Donatella Merlo fa parte del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Torino, ed è autrice di libri e articoli sulla didattica della matematica.