Progressioni aritmetiche e geometriche

7.1 Progressioni aritmetiche.

Definizione. Sia data la successione numerica: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots$. Essa rappresenta una **progressione aritmetica** se la differenza fra qualsiasi termine della successione ed il suo precedente è costante, cioè:

$$a_n - a_{n-1} = d \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{7.1}$$

d viene chiamata ***ragione*** della progressione. Quindi si avrà:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\ &\ldots. \end{aligned} \tag{7.2}$$

In generale, per il termine n-esimo avremo:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \tag{7.3}$$

che rappresenta la relazione fondamentale fra il termine n-esimo della progressione aritmetica, il 1° termine e la ragione costante *d*. Se volessimo ricavare il termine s-esimo (per es. il 17°) conoscendo l'r-esimo (per es. il 6°) e la ragione *d* non dovremmo fare altro che usare la formula (7.3) mettendo al posto di *n* -> *s* e di 1->r, ossia:

$$a_s = a_r + (s-r)d \tag{7.4}$$

Dalla (7.3) o (7.4) si possono ovviamente ricavare le relazioni inverse che permettono di determinare un'incognita a piacere conoscendo le altre due.

Inserimento di m medi aritmetici fra due estremi.

Un problema interessante consiste nell'**inserire *m* medi fra due estremi che chiamiamo *a* e *b***. Per risolverlo dobbiamo solo trovare la ragione *d* della progressione aritmetica. Dalla (7.3) si ottiene:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{b-a}{m+1} \tag{7.5}$$

dove $n=m+2$. Un esempio istruttivo consiste nell'inserire 1 medio fra due estremi. Dalla (7.5) si ottiene allora ($m=1$):

$$d = \frac{b-a}{m+1} = \frac{b-a}{2} \qquad (7.6)$$

e quindi il medio *m* è nella posizione: $m = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$ cioè *m* è proprio la media aritmetica dei due numeri *a* e *b*.

Somma di n termini consecutivi di una progressione aritmetica.

Si racconta che il maestro delle elementari di quello che sarà chiamato il re dei matematici, **F. Gauss** (uno dei tre matematici più grandi di tutta la storia umana assieme ad Archimede e a Newton), propose questo problema sperando di impegnare i suoi studenti per almeno 1 ora: “Sommare i primi 100 numeri naturali”. Quello che chiedeva il maestro era determinare il risultato di: $\sum_{n=1}^{100} n = S_{100} = 1+2+3+...+100$.

Guass risolse il problema in molto meno di 1 ora, senza sbagli e scoprendo un modo per eseguire la somma non solo dei primi 100 numeri naturali, ma anche dei primi 1000 o 10000 in poco tempo. Ecco come fece. Dispose i numeri da 1 a 100 in ordine crescente e poi li riscrisse allineati in colonna ordinandoli in modo decrescente.
Infine eseguì la somma in colonna scoprendo che otteneva 101 ogni volta, ossia 100 volte (7.7).

$$\begin{array}{c} 1,\ 2,\ 3, ..., \ 98,\ 99, 100 \\ 100, 99, 98, ..., \ 3,\ 2,\ 1 \\ \hline \underbrace{101, 101, 101, ..., 101, 101, 101}_{100} \end{array} \qquad (7.7)$$

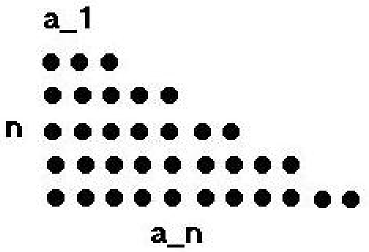
Il risultato della somma dei primi 100 numeri risultava essere quindi:

$$S_{100} = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050 \qquad (7.8)$$

E’ facile ora estendere il ragionamento di Gauss ad una successione qualunque di cui si voglia determinare la somma di *n* termini consecutivi di cui sia noto il primo e l’ultimo, ottenendo la formula generale:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad (7.9)$$

Questa formula richiama da vicino l’area di un trapezio: “Somma delle basi ($a_1 + a_n$) per altezza (*n*) diviso 2”. In effetti possiamo attribuire alla (7.9) un significato geometrico considerando la figura sottostante:



La somma S_n non è altro quindi che il numero di pallini neri contenuti nel trapezio rettangolo di basi a_1 e a_n e di altezza n.

7.2 Progressioni geometriche.

Definizione. Sia data la successione numerica: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...$. Essa rappresenta una **progressione geometrica** se il rapporto fra qualsiasi termine della successione ed il suo precedente è costante, cioè:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (7.10)$$

q viene chiamata ***ragione*** della progressione geometrica. Quindi si avrà:

$$\begin{aligned} a_2 &= q \cdot a_1 \\ a_3 &= q \cdot a_2 = q^2 \cdot a_1 \\ a_4 &= q \cdot a_3 = q^3 \cdot a_1 \\ &.... \end{aligned} \qquad (7.11)$$

In generale, per il termine n-esimo avremo:

$$a_n = q^{n-1} \cdot a_1 \qquad (7.12)$$

che rappresenta la relazione fondamentale fra il termine n-esimo della progressione geometrica, il 1° termine e la ragione costante q. Se volessimo ricavare il termine s-esimo (per es. il 17°) conoscendo l'r-esimo (per es. il 6°) e la ragione q non dovremmo fare altro che usare la formula (7.12) mettendo al posto di n -> s e di 1->r, ossia:

$$a_s = q^{s-r} \cdot a_r \qquad (7.13)$$

Dalla (7.12) o (7.13) si possono ovviamente ricavare le relazioni inverse che permettono di determinare un'incognita a piacere conoscendo le altre due.

Inserimento di *m* medi geometrici fra due estremi.

Un problema interessante consiste nell'**inserire *m* medi geometrici fra due estremi che chiamiamo *a* e *b***. Per risolverlo dobbiamo solo trovare la ragione q della progressione geometrica. Dalla (7.12) si ottiene:

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} \qquad (7.14)$$

dove $n=m+2$. Un esempio istruttivo consiste nell'inserire 1 medio geometrico fra due estremi. Dalla (7.14) si ottiene allora ($m=1$):

$$q = \sqrt{\frac{b}{a}} \qquad (7.15)$$

e quindi il medio m è nella posizione: $m = a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab}$ cioè m è proprio la media geometrica dei due numeri a e b. Il medio geometrico fra due estremi corrisponde al **medio proporzionale** di una proporzione continua del tipo:

$$a : x = x : b \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{ab} \qquad (7.16)$$

E' facile dimostrare che la media aritmetica è maggiore della media geometrica. Scriviamo infatti:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \quad \Rightarrow \quad a+b > 2\sqrt{ab} \quad \Rightarrow \quad (a+b)^2 > 4ab \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2-2ab > 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ (a-b)^2 > 0 \quad \forall a,b \quad a \neq b \qquad (7.17)$$

Si ottiene l'uguaglianza delle due medie solo nel caso banale in cui i valori estremi a e b siano uguali. Agli studenti quindi, conviene sempre farsi mettere nel registro la media aritmetica dei voti piuttosto che quella geometrica.

Qualche esempio.

1. Sia data la successione: $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18} \ \frac{1}{54}$. Dire se rappresenta una progressione geometrica e calcolarne la ragione.
Per essere una progressione geometrica è necessario e sufficiente che il rapporto fra due termini consecutivi qualunque sia costante e valga q, la ragione. Si vede facilmente che ciò è vero per la successione riportata in quanto il rapporto fra due termini consecutivi è sempre $q = \frac{1}{3}$.

2. Inserire 4 medi geometrici fra 2 e 486. Dalla (7.14) otteniamo: $q = \sqrt[4+1]{\frac{486}{2}} = \sqrt[5]{243} = 3$ per cui la progressione diventa: 2, 6, 18, 54, 162, 486.

3. Determinare il termine a_4 di una progressione geometrica conoscendo $a_1 = -\frac{4}{25}$ e $a_5 = -100$. Questo esercizio si risolve determinando prima la ragione della progressione, e poi il termine a_4. Si ottiene:

$$q = \sqrt[4]{100 : \frac{4}{25}} = \sqrt[4]{100 \cdot \frac{25}{4}} = \sqrt[4]{25^2} = \sqrt[4]{5^4} = \pm 5$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo aggiunto il segno $\pm$ davanti al 5 perché l'indice della radice, 4, è pari e quindi sia q=+5 che q=–5 possono essere considerate ragioni accettabili. Le due progressioni sono quindi:

q=+5: $-\frac{4}{25}, \quad -\frac{4}{5}, \quad -4, \quad -20, \quad -100$

q=-5: $-\frac{4}{25}, \quad \frac{4}{5}, \quad -4, \quad 20, \quad -100$

e quindi esistono 2 termini a_4 accettabili: -20 e 20.

4. Determinare la parte x di un segmento lungo l che sia medio proporzionale fra il tutto e la parte rimanente. Ossia x è la media geometrica fra il tutto e la parte rimanente del segmento.
Questo problema classico, permette di trovare la cosiddetta **sezione aurea** di un segmento. Dai dati del problema si ha:

$$l : x = x : (l - x) \tag{7.18}$$

che risolta fornisce:

$$\frac{x}{l} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \simeq 0.618 \tag{7.19}$$

Questo numero è di straordinaria importanza soprattutto nell'arte (architettura, scultura, pittura, musica) perché esprime in sé una proporzione armonica fra le parti. Esso era già ben noto ai popoli antichi dagli egiziani ai greci fino a tutto il medioevo e al rinascimento. Per ulteriori approfondimenti leggere la dispensa NUMERI. In questa sede vogliamo notare come la sezione aurea di un segmento possa essere determinata calcolando il limite: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ della **successione di Fibonacci**:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} \\ a_1 &= 1 \quad \text{e} \quad a_2 = 2 \end{aligned} \tag{7.20}$$

I primi termini di questa successione sono: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … Fermandoci solo a questi, si otterrebbe per la sezione aurea un valore approssimato:

$\frac{x}{l} = \frac{55}{89} \simeq 0.61797753$ vicino al valore esatto dato dalla (7.19) meno di una parte su 10000!

Somma dei termini di una progressione geometrica.

Procediamo similmente a quanto abbiamo già fatto per le progressioni aritmetiche calcolando la somma S_n dei primi n termini di una progressione geometrica. Scriviamo:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$
$$qS_n = a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1}$$

Facendo la differenza fra la prima e la seconda ottengamo:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1} \qquad \Rightarrow \qquad S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-q} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

ossia:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \tag{7.21}$$

La formula (7.21) si può estendere a qualunque numero si voglia di termini. Risulta subito chiaro che se q>1 la somma di un numero enorme di termini di una progressione geometrica non ha alcun senso perché il singolo elemento della progressione tende a diventare sempre più grande e quindi tutta la somma diverge, ossia tende all'infinito. In sintesi si può scrivere che: $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ (q>1). Il discorso è invece completamente diverso se 0<q<1 perché in questo caso i termini tendono a diventare sempre più piccoli e al limite tendono a zero, ossia: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Cosa succede allora alla S_n? Converge o diverge? Ad un primo ragionamento superficiale verrebbe da dire che, sommando infiniti termini tutti di valore finito, la somma dovrebbe essere infinita e quindi $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ anche per 0<q<1. Invece, come si diceva, le cose stanno in modo completamente diverso; dalla (7.21) si vede che $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e quindi otteniamo:

$$S_\infty = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \tag{7.22}$$

La somma di un infinito numero di termini positivi tutti finiti converge verso un numero preciso! Adesso che lo abbiamo dimostrato rigorosamente capiamo che ciò è ragionevole. Pensiamo infatti di sommare le frazioni: $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + ... + ... = 0.\overline{1}$ ottenendo appunto 0.111111… Questa è anche la somma di una serie geometrica di valore iniziale 1/10 e ragione 1/10 che per la (7.22) fornisce come risultato: $0.\overline{1}=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}+...+...=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{9}$. Così facendo, siamo riusciti a determinare la frazione generatrice di un numero decimale periodico. Vediamo di ricavarci la regola che abbiamo imparato a memoria nei primi anni di scuola: "La frazione generatrice di un numero decimale periodico si ottiene mettendo al numeratore il numero privato della virgola meno il numero formato dalla parte intera e dall'antiperiodo (se c'è) e al denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo."

Esempi.

1. **Frazione generatrice di un numero periodico semplice.**

Determinare la frazione generatrice del numero: $2,\overline{53}$ ossia: 2,5353535353..

Scriviamo $2,\overline{53}=2+0,\overline{53}=2+53\cdot\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{1000000}+.....\right)$. L'espressione tra parentesi è una serie geometrica di termine iniziale 1/100 e di ragione 1/100 per cui per la (7.22) si ha: $\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{1}{100}\cdot\frac{100}{99}=\frac{1}{99}$ per cui otteniamo:

$2,\overline{53}=2+\frac{53}{99}=\frac{198+53}{99}=\frac{253-2}{99}$ che è proprio la regola enunciata.

2. **Frazione generatrice di un numero periodico composto.** Determinare la frazione generatrice del numero: $14,7\overline{6}$ ossia: 14,76666666666... Scriviamo il numero come $14{,}7+0,\overline{6}=14+\frac{7}{10}+6\cdot\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+...\right)$. L'espressione tra parentesi è una serie geometrica di termine iniziale 1/100 e di ragione 1/10 per cui per la (7.22) si ha: $\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{100}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{90}$ per cui otteniamo:

$$14,7\overline{6}=14+\frac{7}{10}+6\cdot\frac{1}{90}=\frac{14\cdot 90+7\cdot 9+6}{90}=\frac{14\cdot 100+7\cdot 10+6-(14\cdot 10+7\cdot 1)}{90}=\frac{1476-147}{90}$$

che è proprio la regola enunciata.

Il paradosso della dicotomia e di Achille e la tartaruga.

Si racconta che nel V secolo a.C. il filosofo greco Zenone di Elea inventò alcuni paradossi che poi diventarono famosi. Fra questi sicuramente primeggiano il paradosso della dicotomia e di "Achille e la tartaruga". In una gara campestre, Achille deve percorrere la distanza di 1 Km. Zenone, attraverso un ragionamento sottile, conclude che Achille non raggiungerà mai la fine della corsa. Vediamo come

lo ragiona. Achille, prima di percorrere il chilometro che lo separa dal traguardo deve percorrere mezzo chilometro. Dopo che ha percorso il mezzo chilometro, prima di arrivare in fondo, deve percorrere ¼ di Km. ecc. Siccome per ogni tratto che percorre ci mette un tempo finito (perché ciascun tratto per quanto piccolo è sempre finito) e dato che i tratti sono in numero infinito il tempo totale è infinito ed Achille non raggiungerà mai la fine.
Il paradosso sta nel fatto che, ovviamente, Achille taglierà il traguardo in un tempo dato da s/v dove s=1km e v la sua velocità (costante) lungo la gara; ma allora dove sta l'errore?

Alla luce di quanto detto è facile dare la risposta. Achille, del chilometro che lo separa dalla meta, percorre i tratti: $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},....$ che sono una serie geometrica di termine iniziale ½ e di ragione ½. Se, per semplicità, ammettiamo che la sua velocità sia di 1 Km/minuto, Achille impiega proprio ½ minuto per il primo tratto, ¼ di minuto per il secondo ecc. La somma di questa serie non è infinita come sosteneva Zenone, pur essendo costituita da una somma infinita di termini tutti finiti. Infatti per la solita formula (7.22) essa fornisce come risultato 1 (minuto)! Quindi si ha:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \qquad (7.23)$$

E' questa la grande scoperta dei greci: scrivere 1 come la somma infinita di potenze di ½.

Il secondo e più noto paradosso di tutta l'antichità è una variante del primo. Achille sfida una tartaruga in una gara di velocità lungo un percorso di 1km. La tartaruga parte con 100 m. di vantaggio rispetto ad Achille che come è noto era il più veloce di tutti gli Achei. Nella realtà Achille raggiunge e supera con facilità la lenta tartaruga, ma Zenone, con un ragionamento simile a quello precedente, dimostra che ciò non può accadere. Infatti quando Achille raggiunge il punto s_0 da cui è partita la tartaruga, essa si sarà spostata nel punto s_1; quando Achille avrà allora raggiunto il punto s_1, la tartaruga si sarà spostata nel punto s_2 ecc. In questo modo, anche se Achille si avvicinerà sempre più alla tartaruga, non la raggiungerà mai!
Ancora una volta siamo caduti nel tranello delle somme infinite che intuitivamente ci fanno pensare ad un risultato infinito. Supponiamo, ancora per semplicità, che Achille viaggi ad una velocità di 1 m/s e che sia 10 volte maggiore di quella della tartaruga. Dopo 100 secondi Achille sarà nella posizione s_0 mentre la tartaruga si sarà spostata nella posizione s_1=110 m. Dopo altri 10 s, Achille avrà raggiunto la posizione s_1 ma la tartaruga si sarà spostata nella posizione s_2=111 m. In 1 solo secondo Achille colmerà questo metro ma la tartaruga si sarà spostata di altri 1/10 di m. E' chiaro che la serie dei tempi di percorrenza di Achille con cui abbiamo a che fare è: 100+10+1+1/10+1/100+…. che rappresenta una serie geometrica di termine iniziale 100 e ragione 1/10. La somma di questa serie (sempre per la (7.22)) è $111,\overline{1}$ s

cioè dopo 111 +1/9 s dalla partenza Achille avrà raggiunto la tartaruga e all’istante successivo l’avrà superata .

Nome file:	Progressioni
Directory:	C:\Roberto\WEB_scuola\Dispense
Modello:	C:\WINDOWS\Application Data\Microsoft\Modelli\Normal.dot
Titolo:	Dispense di matematica
Oggetto:	
Autore:	Roberto Fantini
Parole chiave:	
Commenti:	
Data creazione:	14/11/2001 22.07
Numero revisione:	61
Data ultimo salvataggio:	12/12/2002 21.56
Autore ultimo salvataggio:	Roberto Fantini
Tempo totale modifica	542 minuti
Data ultima stampa:	12/12/2002 21.57

Come da ultima stampa completa

Numero pagine:	9
Numero parole:	2.987 (circa)
Numero caratteri:	17.027 (circa)