Associazione pedagogico-professionale qualificata per la formazione docente dal MIUR (D.M. 1225/2005)

www.mce-fimem.it/sardegna - e-mail rinrizz@tin.it

Via Gaetano Cima, 8 – 09124 Cagliari - tel/fax 070.6848726- c.c.post. 11540499

Note sull'attività "dai fiammiferi alla formalizzazione" …… *ed evoluzione del discorso*

Consideriamo la successione di primo termine a_1 e ragione (salto) r

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$ formata in questo modo

$a_2 = a_1 + r; a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r;$

$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r;....; a_n = a_1(n-1)r$

- la somma dei termini equidistanti dagli estremi è uguale alla somma dei termini estremi,

per es. $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ...$$

perchè $a_2 + a_n = (a_1 + r) + (a_n - r) = a_1 + a_n$

$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2r) + (a_n - 2r) = a_1 + a_n$ ecc. ecc.

Verifica numerica adatto alla primaria: 3+6+9+12+15+18+21+24;

3+24=27; 6+21=(3+3)+(24-3)=3+24=27; 9+18=(3+9)+(24-6)=3+24=27 ecc. ecc.

- somma dei primi n numeri naturali (Gauss)

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-1) + n$$
$$S_n = n + (n-1) + ... + 4 + +3 + 2 + 1$$

sommando le due espressioni si ha

$$2S = (n+1) + (n+1) + ... + (n+1)$$ *n volte*

$$2S = n\ (n+1) \quad ; \qquad S = \frac{n(n+1)}{2}$$

- somma dei primi n termini di una progressione aritmetica di primo termine qualunque,

operando come prima e considerando i due punti precedenti si ha $S_n = n\ \frac{a_1 + a_n}{2}$

- somma dei primi n numeri pari $S_{np} = n(n+1)$

$$S = 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2(n-1) + 2n + ...$$
$$S = 2n + 2(n-1) + ... + 8 + 6 + 4 + 2$$

sommando le due espressioni si ha

$$2S = (2n+2) + (2n+2) + ... + (2n+2) = n \cdot (2n+2)$$ ***n volte (2n+2)***

$$2S = 2 \cdot n \cdot (n+1); \qquad S = n \cdot (n+1)$$

somma dei primi n numeri dispari $S_{nd} = n^2$ (Pitagora)

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-3) + (2n-1)$$
$$S = (2n-1) + (2n-3) + ... + 7 + 5 + 3 + 1$$

sommando le due espressioni si ha

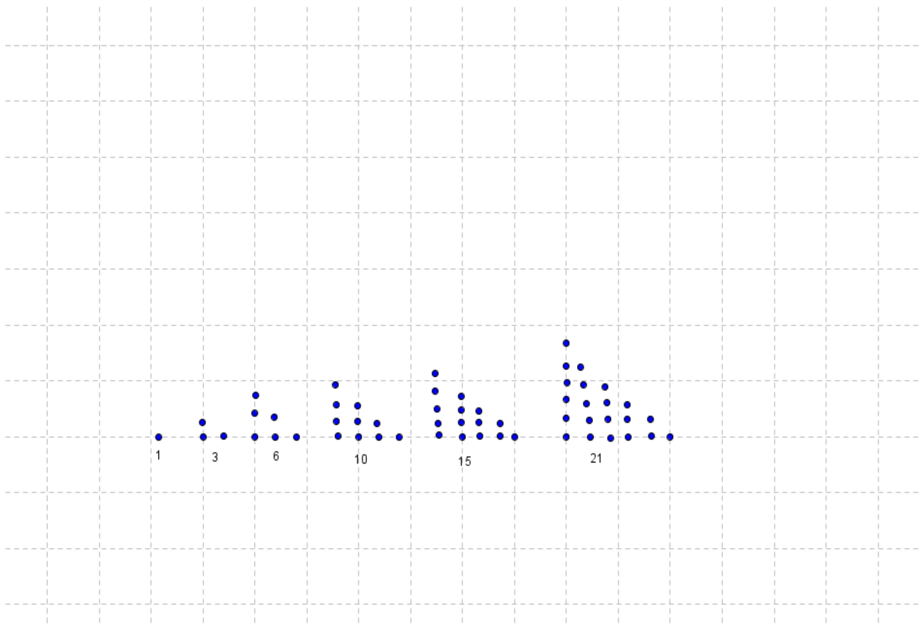
$$2S = 2n + 2n + 2n + ... + 2n = n \cdot 2n$$ ***n volte 2n***

$$2S = n \cdot 2n; \qquad S = n^2$$

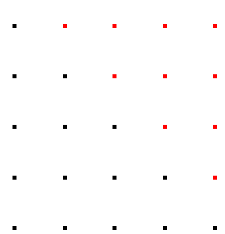
❑ conseguenza: ogni numero dispari è uguale alla differenza di due quadrati consecutivi, vedere sia numericamente per es. $7 = 4^2 - 3^2$ che

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

❑ numeri triangolari 1,3,6,10,15,21, ...



La determinazione dell'n-esimo numero triangolare si può vedere graficamente



i due triangoli hanno 5 e 4 punti per lato, insieme formano un (numero) quadrato di area uguale a $n \cdot (n+1)$ (in questo caso $4 \cdot 5$), i punti che formano il triangolo sono la metà, per cui $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$

oppure considerando lo schema

n	numero triangolare	
1	1	1
2	1+2	3
3	(1+2)+3	6
4	(1+2+3)+4	10
5	(1+2+3+4)+5	15
6	(1+2+3+4+5)+6	21
7	(1+2+3+4+5+6)+7	28
8	(1+2+3+4+5+6+7)+8	36
9	(1+2+3+4+5+6+7+8)+9	45
…	…………………	……
n	1+2+3+4+…..+n	Sn

da cui si vede perchè l'n-esimo numero triangolare ha la forma della somma dei primi n numeri naturali.

- ❑ la somma di due numeri triangolari successivi è un quadrato

$$n^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

proprietà delle operazioni con i numeri triangolari

somma $\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b + a \cdot b$

prodotto $\Delta_{a \cdot b} = \Delta_a \cdot \Delta_b + \Delta_{a-1} \cdot \Delta_{b-1}$

qualche esempio:

somma $\Delta_5 = \Delta_{2+3} = 15 = \Delta_2 + \Delta_3 + 2 \cdot 3 = 3 + 6 + 6 = 15$

prodotto
$$\begin{aligned} &\Delta_6 = \Delta_{2 \cdot 3} = \Delta_2 \cdot \Delta_3 + \Delta_1 \cdot \Delta_2 \\ &21 = 3 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \end{aligned}$$

- ❑ definizione di numero perfetto (uguale alla somma di tutti i suoi divisori escluso sè stesso), Pitagora->Euclide->Eulero 6,28,496,8128, *numero di 8 cifre, di 10 cifre*, ecc.
- ❑ tutti i numeri perfetti pari (non si sa se ne esistono dispari) sono triangolari, 6 è il

3° Δ, 28 il 7° Δ, 496 (che è 16*31) è il 31° Δ, 8128 (che è 64*127) è il 127° Δ,

infatti (Euclide) $2^n(2^{n+1}-1)$ è perfetto e si ha

$$\frac{2^n \cdot \left(2^{n+1}-1\right) \cdot \left(2^{n+1}-1+1\right)}{2} = \frac{k \cdot (k+1)}{2} \qquad \text{(numero } \Delta\text{)}$$

- ❑ il quadrato dell'n-esimo numero triangolare è uguale alla somma dei primi n cubi

prendiamo il **5**° numero triangolare $\Delta_5 = \dfrac{5 \cdot (5+1)}{2} = 15$

$$15^2 = 225 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

- ❑ (Nicomaco) nella serie dei numeri dispari il 1° è il cubo di 1, la somma dei due numeri successivi è il cubo di 2, la somma dei tre numeri successivi è il cubo di 3, ecc.

$$1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$

quindi la somma dei cubi è:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4 \ + ... = \Delta^2{}_n = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

per la somma dei quadrati si ha

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... = \Delta_n + \Delta_{n-1} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

per vedere perchè partiamo dal cubo di un trinomio per arrivare alla somma dei quadrati:

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

sviluppando la successione

$$2^3 - 1 = 3 + 3 + 1$$

$$2^3 - 1 = 3 + 3 + 1$$

$$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$

....

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

sommando in colonna si ha

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_{quadrati} + 3S + n = 3S_{quadrati} + 3\tfrac{n(n+1)}{2} + n$$

$$(n+1)^3 - 1 - n = 3S_{quadrati} + 3\frac{n(n+1)}{2}$$

$$(n+1)^3 - (1+n) = \quad 3S_{quadrati} + 3\frac{n(n+1)}{2}$$

$$3S_{quadrati} = (n+1)^3 - (1+n) - 3\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_{quadrati} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Giochi di Archimede - Gara Triennio

19 novembre 2008

quesiti 8 e 18

- Per ogni numero naturale n indichiamo con Sn la somma dei primi dieci multipli di n: ad esempio S2 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20.
  Quanto vale S1 + S2 + S3 + . . . + S10?

(A) 2925, (B) 3025, (C) 3125, (D) 3225, (E) 3325.

Seguendo la definizione si ha:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + 10 = \frac{10 \cdot (10+1)}{2} = 55$$
$$S_2 = 2 + 4 + 6 + ... + 10 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 10) = 2 \cdot S_1$$
$$S_3 = 3 + 6 + 9 + .. + 30 = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + .. + 10) = 3 \cdot S_1$$

....

$$S_{10} = 10 + 20 + 30 + ... + 100 = 10 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 10) = 10 \cdot S_1$$
$$S = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{10} = S_1 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 10) = S_1 \cdot S_1 = 55^2 = 3025$$

risposta B.

- La somma di tutti i numeri naturali formati da due cifre distinte è:

  (A) 3840, (B) 3960, (C) 4140, (D) 4260, (E) 4410.

I numeri di due cifre vanno da 10 a 99, bisogna togliere la somma formata da

$$11 + 22 + 33 + ... + 99 = 11 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 9) = 11 \cdot \frac{9 \cdot (9+1)}{2} = 495$$

I numeri cha vanno da 10 a 99 sono 90 e la loro somma è $S_{10 \to 99} = \frac{10 + 99}{2} \cdot 90 = 4905$

per rispondere al quesito basta fare $4905 - 495 = 4410$

risposta E