Operazioni di tipo geometrico sui numeri razionali

Livello scolare : scuola media - scuole superiori

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Comprendere il significato delle frazioni come quoziente di numeri interi Rappresentare frazioni sulla retta numerica Confrontare numeri razionali, relazione d'ordine Riconoscere frazioni equivalenti Produrre il reciproco di una data frazione Giustificare operazioni con i numeri razionali Riconoscere la similitudine fra triangoli Proporre e giustificare congetture	Numeri razionali Teorema di Talete Similitudine tra triangoli Somme tra segmenti Progressione geometrica	Numeri Relazioni Argomentare e congetturare	Disegno tecnico

Quest'attività è un invito allo sviluppo di congetture nell'ambito dei numeri razionali.
Si usa uno strumento geometrico, preso in prestito da Matematica 2001 (tema: proprietà dei numeri razionali) sviluppandolo per ulteriori studi sui numeri razionali.

Presentazione attività.

<u>Per la scuola media</u>

1. Presentazione dello strumento operativo
2. Rette parallele
3. Teorema di Talete, rapporto costante tra le parti e l'intero
4. Similitudine fra triangoli
5. Costruzione della retta numerica
6. Costruzione di un numero razionale e sua rappresentazione sulla retta numerica
7. Frazioni reciproche
8. Confronto tra due numeri razionali
9. Considerazioni su modifiche del numeratore e del denominatore
10. Multiplo di una frazione
11. Prodotto tra due frazioni
12. Somma tra due frazioni
13. Costruzione della potenza di (1/2)

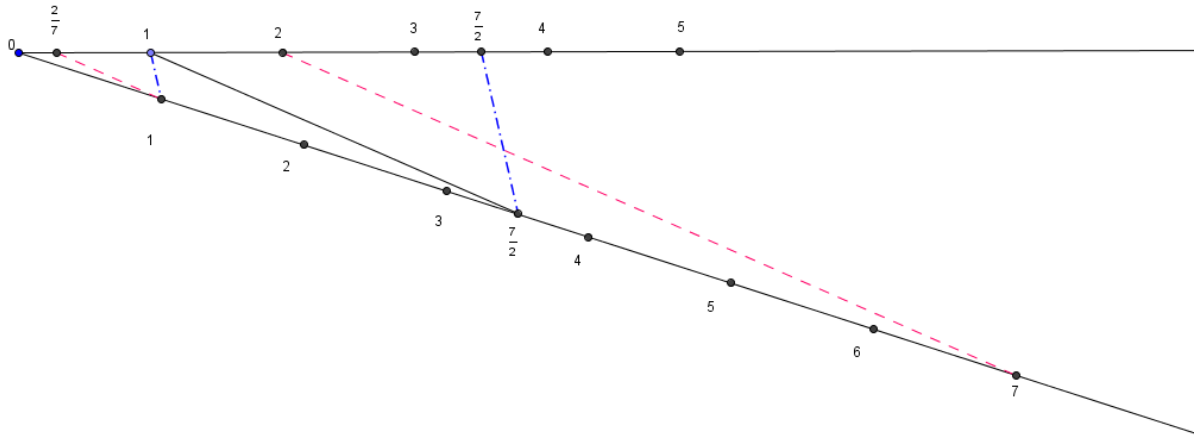
<u>Per le superiori</u>

1. Progressione geometrica
2. Somma di una progressione geometrica con la costruzione di triangoli
3. Somma di una progressione geometrica con i segmenti
4. Paradosso di Zenone

Costruzione di un numero razionale e del suo reciproco. Relazione d'ordine

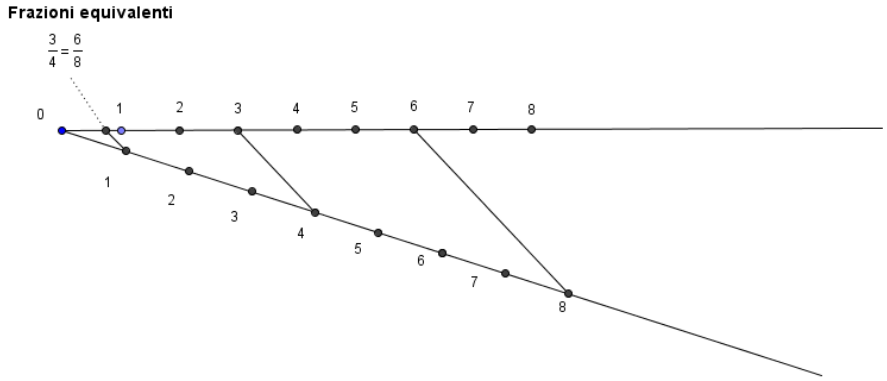
Lo strumento geometrico è formato da due semirette aventi origine in un punto che indicherò con il numero zero, origine della semiretta numerica.

Si riporta sull'orizzontale e sull'obliqua una scala per unità di misura non necessariamente monometrica.
Unendo come in figura i numeri 2 e 7 (da orizzontale a obliqua) e tracciando il segmento parallelo a partire dall'uno sull'obliqua (da obliqua a orizzontale) si ottiene (con Talete o similitudine tra triangoli) il numero razionale 2/7 sulla semiretta orizzontale.
Analoga considerazione si può fare se il segmento parallelo lo tracciamo a partire dall'1 dell'orizzontale, si ottiene così il numero 7/2 sull'obliqua (reciproco di una frazione).
Da far notare che per riportare un numero sull'orizzontale a partire dal corrispondente numero sull'obliqua basta tracciare da quest'ultimo la parallela al segmento 1 --1.



Costruendo alcuni numeri razionali, sull'orizzontale, lo studente sarà portato con naturalezza al loro confronto. Operando piccole modifiche sia al numeratore che al denominatore si guiderà lo studente alla comprensione di come varia il numero razionale
(per esempio partendo da 2/7 vedrà modificarsi il numero in (2+1)/7 e poi in 2/(7+1)).

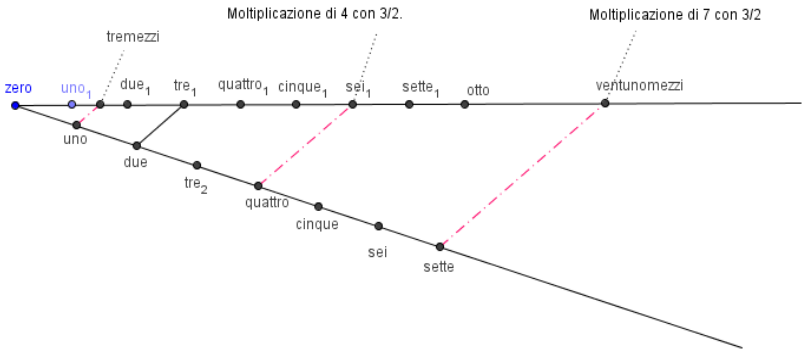
Si possono riconoscere frazioni equivalenti, costruendo per esempio le frazioni 3/4 e 6/8 si mostra allo studente che il punto d'arrivo sull'orizzontale è lo stesso.



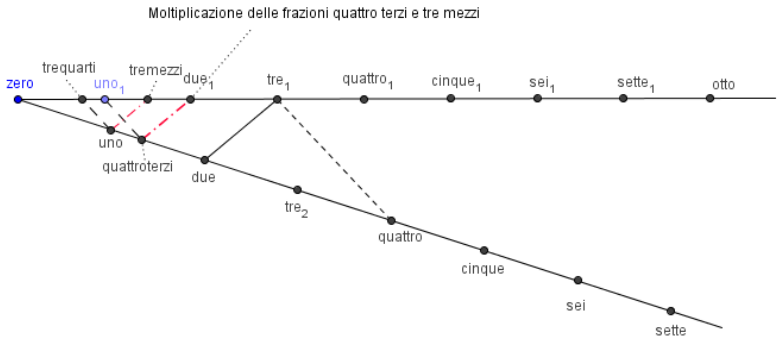
Multiplo di una frazione

Come moltiplicare 3/2 per un numero intero, per esempio 4.

Si costruisce il numero 3/2 sull'orizzontale, si traccia la parallela al 3/2 partendo dall'obliqua posizionandosi sul numero 4.

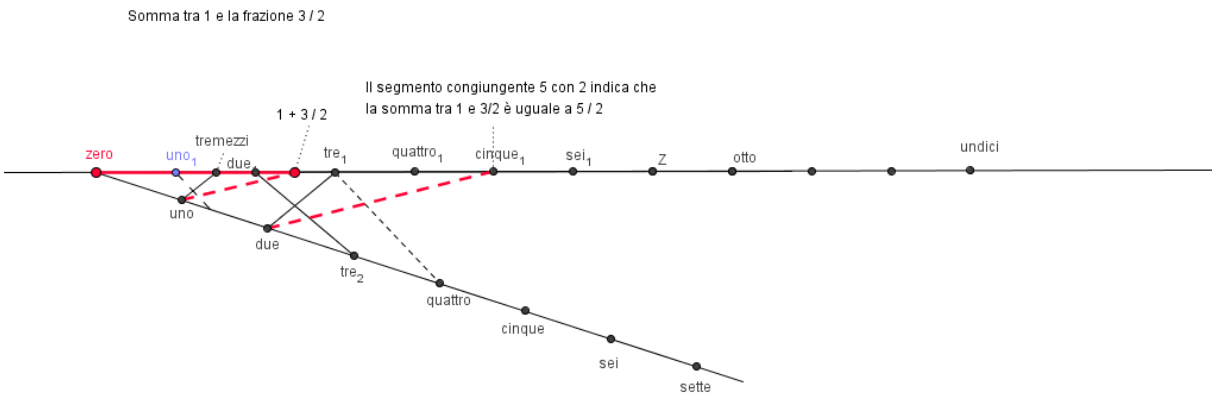


Se invece si vogliono moltiplicare due frazioni, per esempio 3/2 con 4/3, si costruisce sull'orizzontale il numero 3/4 , si riporta sull'obliqua il reciproco cioè 4/3 e si procede come nell'esempio precedente.

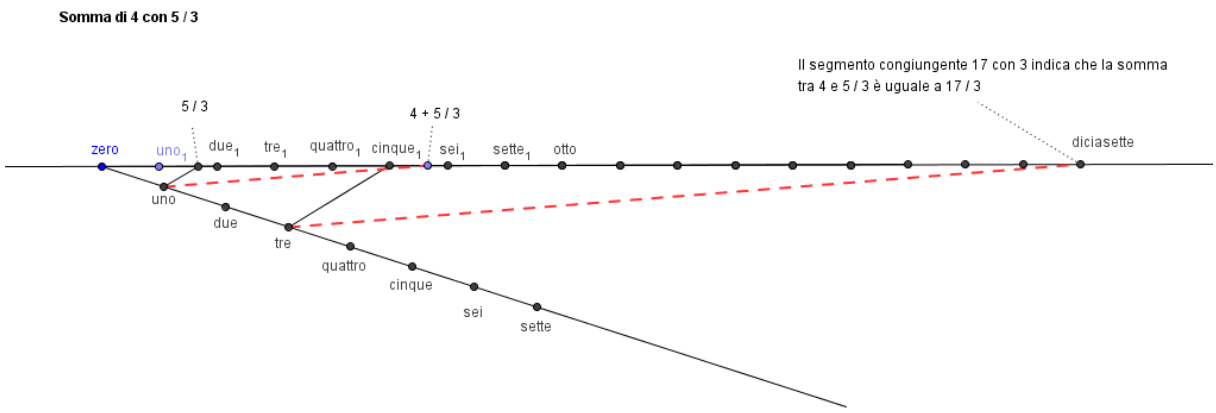


Somma tra due numeri razionali

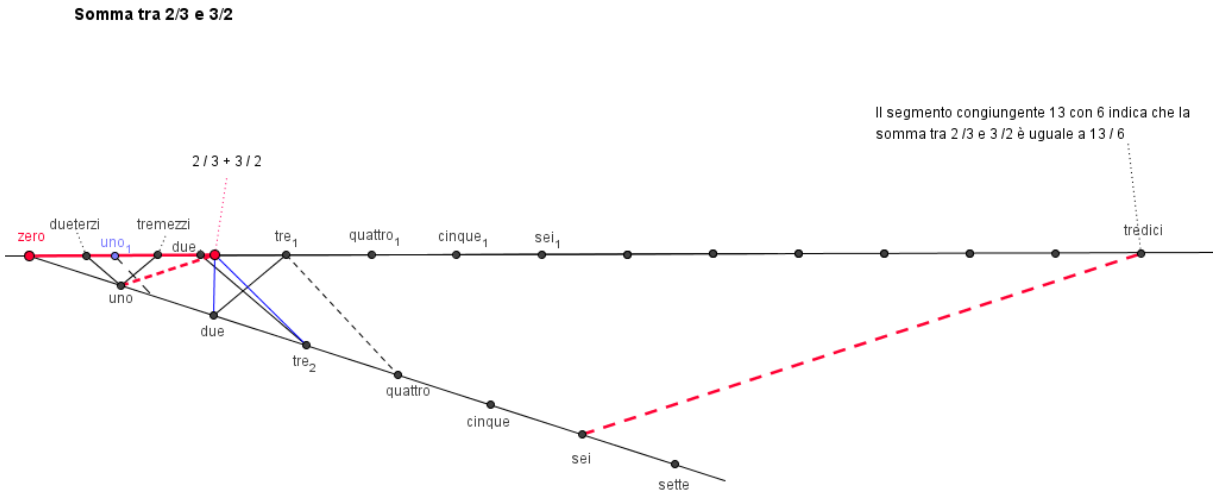
Supponiamo di sommare 1 e 3/2, si riporta con la riga a partire dalla tacca 3/2 la misura corrispondente all'1 dell'orizzontale, o viceversa da 1 si riporta la misura della tacca 3/2, si segna la tacca corrispondente sull'orizzontale, si unisce questa tacca con l'1 dell'obliqua.
Si scorre con le squadrette la parallela al segmento trovato (il segmento congiungente 1 e 1+3/2 disegnato precedentemente), che toccherà sull'orizzontale la tacca corrispondente al 5 nell'orizzontale ed al 2 sull'obliqua, il segmento che unisce (orizzontale – obliqua) il 5 al 2 rappresenta, infatti, il numero 5/2 che è la somma tra 1 e 3/2.
Da notare che, quando uno degli addendi è intero, si può posizionare direttamente la parallela sul punto corrispondente al denominatore nell'obliqua, in questo caso sul 2.



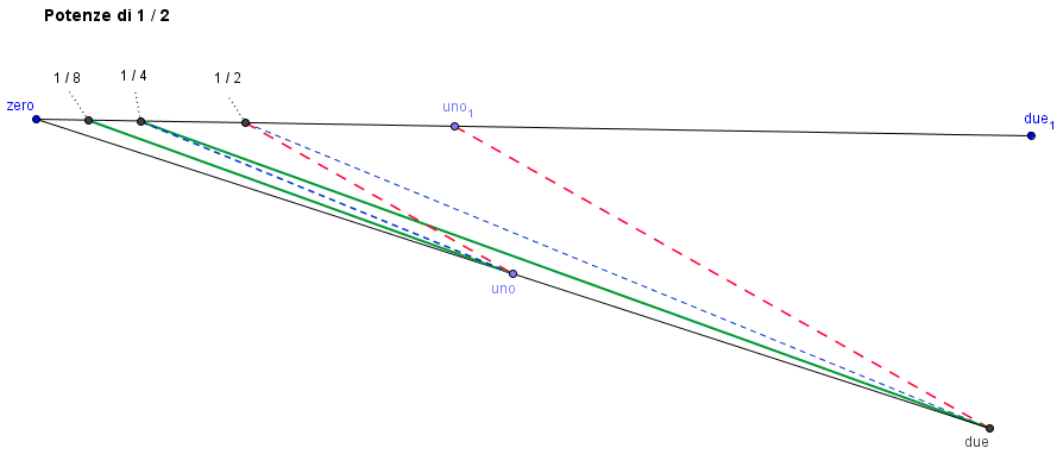
Proviamo che il procedimento va bene anche per 4 + 5 / 3.
Si riporta con la riga a partire dalla tacca 5/3 la misura corrispondente al 4 dell'orizzontale, o viceversa da 4 si riporta la misura della tacca 5/3, si segna la tacca corrispondente sull'orizzontale, si unisce questa tacca con l'1 dell'obliqua.
Si scorre con le squadrette la parallela al segmento trovato (il segmento congiungente 1 e 4+5/3 disegnato precedentemente), che toccherà sull'orizzontale la tacca corrispondente al 17 nell'orizzontale ed al 3 sull'obliqua, il segmento che unisce (orizzontale – obliqua) il 17 al 3 rappresenta, infatti, il numero 17/3 che è la somma tra 4 e 5/3.



Il primo tipo di operazione è possibile anche per la somma di due frazioni, per esempio 2/3 e 3/2 usando lo stesso procedimento.



Costruzione delle potenze di 1/2



Si costruisce sull'orizzontale il numero ½, si unisce ½ con il 2 dell'obliqua e si traccia la parallela a quest'ultimo segmento sempre partendo dal punto 1, cosi di seguito per le altre potenze, si ottengono le potenze $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

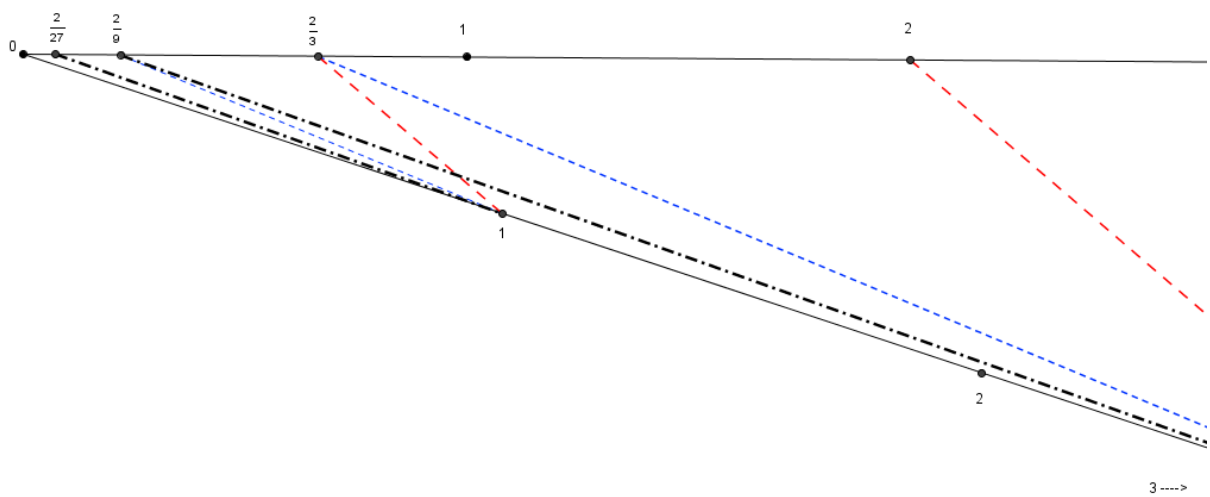
Poniamo allo studente il problema: dove si arriverà continuando a costruire ininterrottamente le potenze di ½ ? Se sommiamo tutti i segmenti ottenuti nell'orizzontale tra 1 e zero si dovrebbe ottenere la misura del segmento cioè 1.

$$1=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right)+.....+\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n}}\right)$$

$$1=1-\frac{1}{2^{n}} \quad \text{per n crescente} \quad n\to\infty \quad \text{si ha} \quad \frac{1}{2^{n}}\to 0$$

In questa situazione si potrebbe proporre il paradosso di Zenone.

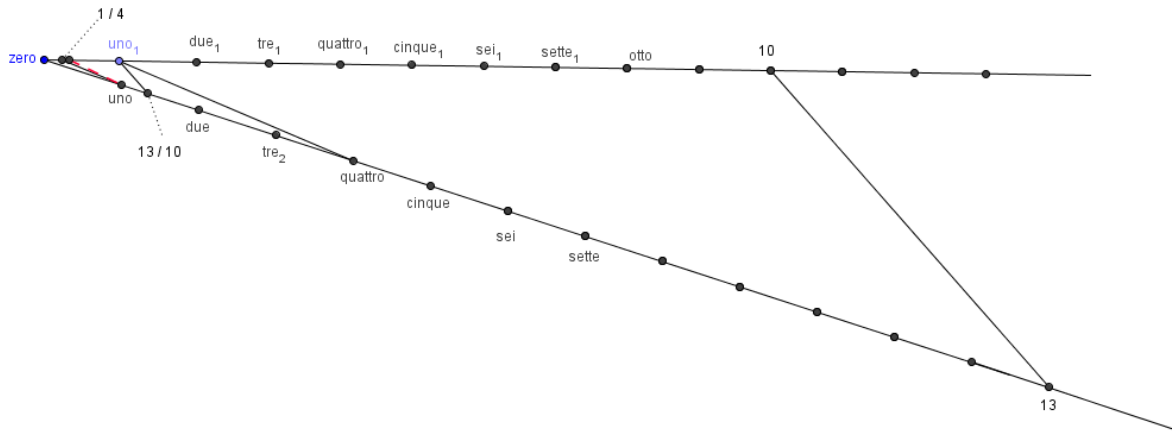
Costruendo iterativamente a partire dal 2/3 e collegando i numeri trovati sull'orizzontale continuamente con il 3 dell'obliqua non si ottengono potenze di 2/3 ma 2 moltiplicato per potenze di 1/3.



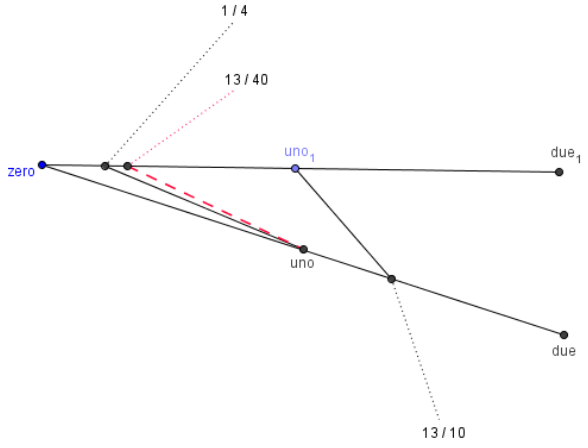
Come costruire un numero razionale formato da due grandi numeri interi che non stanno nelle semirette per motivi di scala.

Si opera con la moltiplicazione tra frazioni come visto precedentemente.

Proviamo con 13/40, scompongo la frazione in $\frac{13}{40}=\frac{13}{10}\cdot\frac{1}{4}$, si localizza $\frac{1}{4}$ sull'orizzontale come sempre e $\frac{13}{10}$ nell'obliqua come reciproco di $\frac{10}{13}$ (ricordo come si fa, si congiunge 10 con 13 e si traccia la parallela partendo dall'1 sull'orizzontale il punto di contatto con l'obliqua rappresenta $\frac{13}{10}$). Da questo $\frac{13}{10}$ trovato si traccia la parallela a $\frac{1}{4}$ il punto sull'orizzontale è il prodotto dei numeri razionali $\frac{13}{10}\cdot\frac{1}{4}=\frac{13}{40}$.

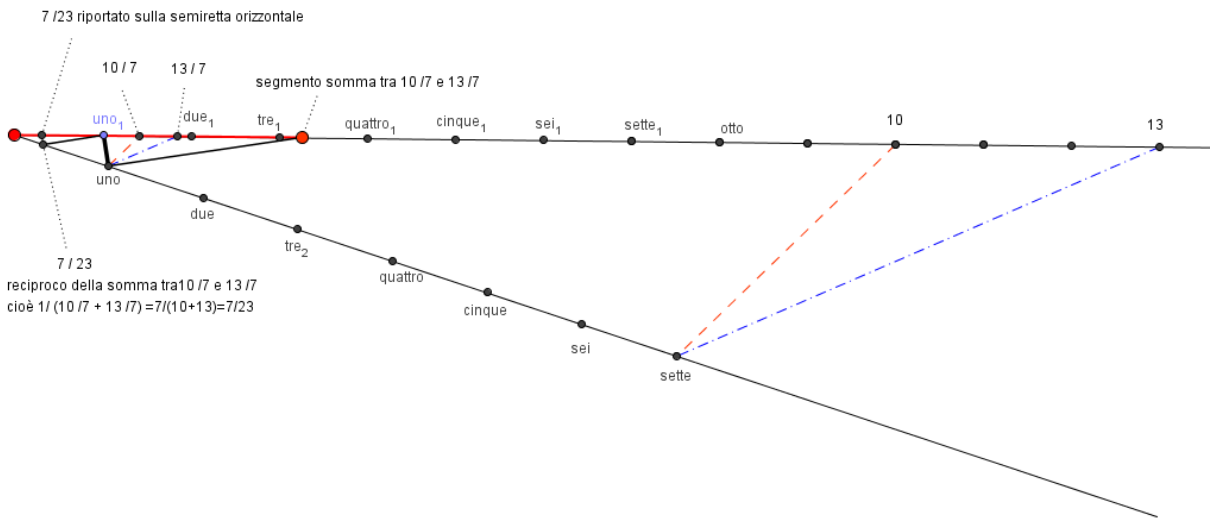


Vediamo uno zoom della posizione delle frazioni per controllare la relazione d'ordine,

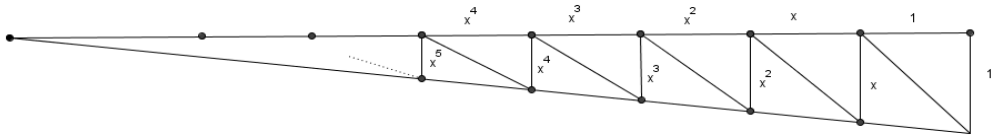


Se il denominatore è un numero primo la tecnica precedente non si può usare perché non si può scomporre. Si usa un altro metodo, proviamo con $\frac{7}{23}=\frac{7}{10+13}=\frac{1}{\frac{10}{7}+\frac{13}{7}}$

Si costruiscono separatamente i numeri razionali $\frac{10}{7}$ e $\frac{13}{7}$,si sommano (metodo manuale) quindi si costruisce il reciproco sull'obliqua, per riportarlo sull'orizzontale si traccia la parallela al segmento 1 <-> 1 e si trova il numero richiesto.



Progressione geometrica
Costruiamo il disegno



Con considerazioni sulla similitudine si ottengono le dimensioni dei triangoli in figura, si può mostrare che (chiamando l il cateto orizzontale)

a) $l:1=(l-1):x$; $l=\dfrac{l-1}{x}$; $xl=l-1$; $l(1-x)=1$; $l=\dfrac{1}{1-x}$

oppure, dalle misure dei singoli cateti orizzontali

b) $l=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+.....+x^{n-1}=\dfrac{1-x^n}{1-x}$

per 0<x<1 si ha $x^n \to 0$ per $n \to \infty$ e quindi $l=\dfrac{1}{1-x}$

MCE Oristano – Franco Figus