

Discussione in aula di un caso di non applicabilità di un Teorema sulle funzioni continue. Risposte attese dagli studenti nel caso di mancata presentazione di opportuni contro-esempi da parte del docente.

Introduzione

Quando si affronta in classe un nuovo argomento, in questo caso un teorema con le sue conseguenze, si propongono esempi che portino alla sua scoperta, o ad argomenti ad esso correlati, in modo che il percorso d'apprendimento sia il più naturale possibile.

Si deve mettere in evidenza che la tesi del teorema è verificata se e solo se tutte le sue ipotesi sono vere, e, se una delle ipotesi è falsa, il teorema non è applicabile.

Nel caso in discussione ho presentato in classe il Teorema di esistenza degli zeri.

Teorema di esistenza degli zeri (Teorema di Bolzano sulle funzioni continue)

Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $I=[a,b]$ e negli estremi assume valori opposti, cioè $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo in cui f si annulla, cioè $f(c)=0$, (c è uno zero per la funzione in I).

Se la funzione non è continua in I oppure non assume valori opposti agli estremi, può non avere uno zero nell'intervallo.

Si devono poi presentare oltre a numerosi esempi a sostegno del teorema, anche vari contro-esempi che servano a chiarire gli aspetti di non applicabilità.

Cosa succede se, invece di seguire questa linea di condotta, linea a cui gli studenti sono ormai abituati, non si presentano questi contro-esempi?

E' a questo proposito che vorrei presentare questa breve nota su uno spaccato di vita in aula in una quinta classe del Liceo Scientifico Tecnologico, per mostrare, una volta di più, la complessità del processo di insegnamento-apprendimento nel caso sia presente una lacuna nel consueto lavoro di interazione e collaborazione docente-studente.

In questo caso parlerei di un problema nato da un'erronea lettura di segni e di una lacuna nella comprensione di simboli, della difficoltà di realizzare un compiuto processo di istruzione-apprendimento se non si spiegano le regole, cioè non avendo fatto subito contro-esempi adatti a chiarire il concetto in discussione per verificare se uno studente di una quinta classe ha la maturità per costruirsi una critica a supporto del necessario studio personale degli argomenti di Matematica o se, al contrario, sia ancora necessaria la guida e lo stimolo del docente.

La conoscenza matematica è in parte anche conoscenza di segni e simboli con il loro significato, lo studente, poco a poco, si dota autonomamente di una rappresentazione simbolica personale.

Nella teoria delle situazioni (G. Brousseau), teoria dell'apprendimento mediante risoluzione di problemi, sono studiate quattro situazioni tra cui la *situazione di validazione* in cui agli studenti sono proposti problemi, nell'atto di risoluzione sono messe in atto le strategie imparate che trascinano con sé comprensione e spiegazioni sulle teorie studiate, in quest'atto lo studente deve dare fondo a tutta la conoscenza acquisita, compresa la propria dotazione di simboli.

Monitorando, nello studente, l'attenzione al linguaggio matematico e alla ricerca della comprensione del significato delle parole del docente nella discussione in aula, ci si pone il problema se è effettivamente una vera comprensione o è una comprensione parziale.

Una comprensione, cioè, regolata solo sulle parole e non anche sui segni e sui simboli.

L'accordo insegnante-studente nato in aula si consolida giorno per giorno con il rapporto interpersonale, con la semplicità del dialogo e nell'interazione reciproca, durante la discussione di gruppo su un argomento.

Si stabilisce un contratto didattico, che deve essere discusso e rivisitato alla luce di nuove esigenze nate nello studente nel momento particolare della lezione sull'argomento che si sta sviluppando.

Sono questi i momenti in cui l'efficacia del modello relazionale si testa sempre di più e si affina, coinvolgendo la crescita in consapevolezza e in autostima.

L'aspetto relazionale è sempre più importante, il consolidamento evidente del rapporto fiduciario studente-insegnante contribuisce alla costruzione di un ambiente in cui l'alunno si sente sicuro, il docente è sentito rispondente alle attese in un'aula-rifugio priva di sorprese.

Dagli studi di didattica della Matematica¹ si è visto che per ottenere un insegnamento efficace bisogna comunicare in aula cercando di favorire l'apprendimento dello studente, ma la comunicazione deve essere fatta con un linguaggio accessibile, in modo che il linguaggio stesso sia veicolo di comprensione e non di incomunicabilità e/o di malintesi.

Tra le finalità del programma di Matematica del Liceo Scientifico Tecnologico si legge:

Lo studio della Matematica cura e sviluppa in particolare:

- *la capacità di cogliere il carattere distintivo dei vari linguaggi*
- *l'attitudine a riesaminare criticamente e a sistemare logicamente le conoscenze via via acquisite*

lo studente deve capire e saper utilizzare il linguaggio specifico della Matematica.

In queste righe vorrei mostrare come, nello studente, un concetto che ormai è o dovrebbe far parte del proprio bagaglio personale possa entrare in conflitto con una richiesta di applicabilità di un teorema sulle funzioni continue.

Secondo gli studi sull'apprendimento significativo² lo studente apprende effettivamente, quando il nuovo si innesta nel già conosciuto collegando i nuovi saperi a concetti già acquisiti, per integrare e costruire un nuovo significato più fondante e più completo.

Dal concetto inizialmente studiato si ottiene un miglioramento della sua struttura teorica e quindi un miglioramento complessivo dell'apprendimento.

In questo caso lo studente conosce altri Teoremi sulle funzioni continue, ha una conoscenza abbastanza significativa sullo studio di funzione ed è in grado di fare un grafico qualitativo e di dedurre informazione su una funzione dato il suo grafico.

Possiede i seguenti requisiti:

- Topologia della retta reale
- Funzioni continue in un punto
- Funzioni continue in un intervallo
- Teorema di Weierstrass, Teorema dei valori intermedi
- Zeri di una funzione

Si studia la topologia della retta, si vedono e assimilano le definizioni di intervallo limitato, illimitato, di punti di accumulazione e di intervallo chiuso e limitato (un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi eventuali punti di accumulazione, in particolare se un intervallo non ha punti di accumulazione è chiuso)³.

Dopo vari esempi si suppone acquisito il concetto di intervallo chiuso e limitato si arriva infine allo studio delle funzioni continue.

Non intendendo qui parlare della difficoltà di apprendimento del concetto di limite e di funzione continua rinvio, per esempio, alla proposta didattica⁴, in classe si arriva quindi alla presentazione del Teorema di Esistenza degli zeri.

¹ B. D'Amore - Elementi di Didattica della Matematica Pitagora Editrice pag. 247

² J. Novak - L'apprendimento significativo Erickson, cap. 3

³ Zwirner-Scaglianti - Analisi Infinitesimale e Numerica vol. 2 pag. 11, Cedam

⁴ Silvia Castagnoli in L'educazione Matematica CRSEM Cagliari n. 3, ottobre 2004

Questo teorema oltre ad essere abbastanza importante nella teoria delle funzioni continue lo è anche nella discussione sulla ricerca di soluzione di un'equazione in un dato intervallo, è da ricordare a questo proposito l'appunto dell'UMI che invita a non presentare studio di funzioni e ricerca delle soluzioni come problemi separati e tra loro sconnessi⁵.

Dopo vari esempi ed esercizi, gli studenti dichiarano di aver ben capito il teorema e di saperlo applicare.

A questo punto presento il seguente esempio che è poi un contro-esempio, il primo proposto su questo argomento, in effetti è un esercizio usato per verificare la comprensione effettiva del Teorema in assenza di specifiche controindicazione da parte del docente.

Esercizio:

Data una funzione continua nell'intervallo $I=(1,2]$, si ha che $f(1)=-1$ e $f(2)=2$ dire se la funzione ha uno zero nell'intervallo considerato.

La situazione è la seguente,

Condizioni agli estremi

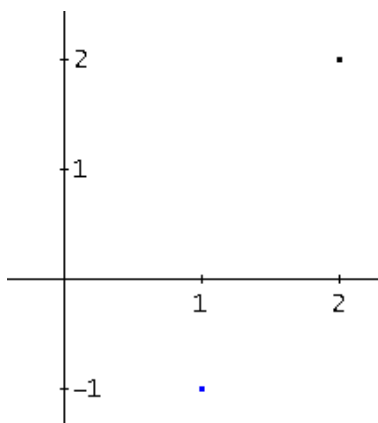


fig. 1

Una delle soluzioni proposte dagli studenti

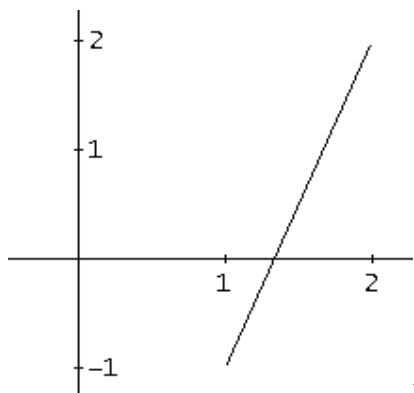


fig. 2

Una delle soluzioni proposte dal docente

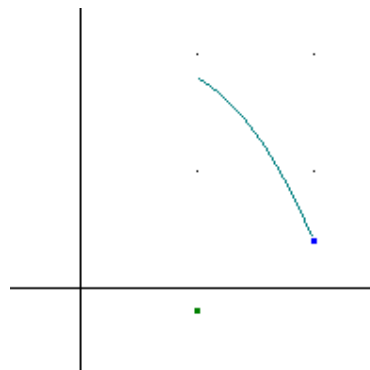


fig. 3

⁵ Matematica 2003 – La Matematica per il cittadino – secondo ciclo , pag. 17

La stragrande maggioranza degli studenti risponde con sicurezza che il Teorema è applicabile, e quindi è vera la tesi, esiste almeno un punto interno all'intervallo in cui la funzione ha uno zero (vedi fig. 2).

Pochi studenti invece rispondono correttamente che la funzione potrebbe non avere uno zero, ma, ad una richiesta di spiegazione la risposta denota una non comprensione del testo dell'esercizio.

Vediamo di analizzare questi fatti.

Il testo dell'esercizio "sembra" ripetere l'enunciato del teorema, in pochi si accorgono di quella piccola parentesi tonda nell'intervallo dato, ed anche accorgendosene al fatto non viene data molta importanza.

Probabilmente nella costruzione mentale e nella sua abituale pratica didattica lo studente è confortato dalla somiglianza dell'esercizio e cade nell'errore descritto.

In una classe gemella l'esercizio è dato in "Italiano" cioè l'intervallo $I=(1,2]$ diventa "intervallo aperto a sinistra", in questo caso quasi nessuno cade in errore perché la frase "aperto a sinistra" non è presente nell'enunciato del Teorema dato in aula e questo vuol dire che qualcosa non va, l'esercizio è diverso dal solito, nasce una discussione che porta alla scoperta del colpevole.

Conclusioni

La classe è una quinta, con studenti al termine del ciclo di studi della secondaria superiore e ormai prossimi all'esame di Stato, e anche se il linguaggio matematico sembra, nei suoi costrutti fondamentali essenzialmente acquisito, si evidenziano le difficoltà di consolidamento e la mancanza di certezze.

Mi sembra che queste ultime dovrebbero essere date proprio da esercizi scelti, come quello appena descritto, e a seguito dell'interazione con la classe dopo un'ampia discussione confortata da altri contro-esempi.

Lo studente, anche se in un momento cruciale dell'evoluzione del proprio sapere e in un periodo di crescita culturale e di raggiungimento della maturità, sembra non meditare abbastanza sul significato dei simboli, la formalizzazione del linguaggio matematico allora può risultare difficile poiché servono capacità di sintesi e una sicura padronanza dell'argomento in discussione, i segni ed i simboli possono essere ingannevoli se non rimangono impressi nel loro significato.

Una frase simile all'enunciato di un Teorema passa senza difficoltà l'esame di accettazione dello studente, d'altronde la fiducia nel proprio docente è consolidata in classe dai tanti momenti di discussione e dai rapporti relazionali cresciuti nell'anno scolastico facendo in modo che anche lo studente più curioso e attento cada nell'errore.

L'insegnante, durante la discussione del problema dovrà cercare di continuare quel processo che ha permesso di costruire e far crescere la classe tendendo all'apprendimento collettivo motivando ancora di più, se possibile, gli studenti.

La richiesta di risoluzione di un problema è vista come richiesta di adattamento ai desideri del docente, la domanda resta senza controllo da parte dello studente disattento.

Il problema posto chiede se la funzione ha uno zero nell'intervallo dato, questa è una domanda onesta che segue e si adatta alle situazioni sociali di regola adottate in classe e quindi rispondente alle attese, perché presuppone un controllo preliminare sulle ipotesi del Teorema.

Diverso sarebbe stato se si fosse chiesto "determinare lo zero della funzione ...", dando la sicurezza, infondata, che il Teorema sia applicabile.